INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE ROUEN

SESSION DE 1985

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'objet du problème est la construction d'approximations de la fonction Arctan *par des polynômes ou des fractions rationnelles. Les deux parties,* I *et* II, *sont indépendantes.*

I

Soient a, b, c, d quatre réels. On considère les fonctions polynômes P et Q définies par :

$$P(x) = x(1 + ax^2 + bx^4)$$
$$Q(x) = 1 + cx^2 + dx^4 .$$

1. Trouver a, b, c, d pour que la fonction f définie par

$$f(x) = Q(x) \operatorname{Arctan} x - P(x)$$

admette, au voisinage de 0, le développement limité

$$\alpha x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où

n est un entier aussi grand que possible,
α est un réel différent de 0,
ε est une fonction de limite 0 en 0.

(On donnera les valeurs de a, b, c, d sous forme de fractions irréductibles.)

Vérifier que

$$\alpha = -\frac{64}{43659}.$$

On suppose désormais que a, b, c, d *ont les valeurs trouvées.*

2. On envisage d'utiliser la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ comme approximation de la fonction Arctan sur $[0,1]$. Pour étudier la qualité de cette approximation, on introduit la fonction φ telle que

$$\varphi(x) = \operatorname{Arctan} x - F(x).$$

a. Montrer que la dérivée φ' de φ est une fraction rationnelle que l'on exprimera à l'aide de P, Q et de leurs dérivées.

b. Expliciter le numérateur de φ' (on utilisera son degré, ainsi que les développements limités de φ et de φ' au voisinage de 0, qu'on déduira de celui de f).

c. En déduire, pour tout x de $[0,1]$:

$$-2.10^{-4} < \varphi(x) \leqslant 0 \qquad (1).$$

3. On se propose d'améliorer les résultats de la question 2 en introduisant deux formules d'approximation distinctes, valables respectivement pour Arctan x dans $\left[0, \frac{\pi}{8}\right[$ et dans $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$.

a. Montrer :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

b. On définit une fonction u par :

$$\text{Arctan } x = \frac{\pi}{8} + \text{Arctan } [u(x)].$$

Donner le domaine de définition de u, l'expression de $u(x)$, et l'image par u de l'intervalle $[\sqrt{2} - 1, 1]$.

c. On définit alors une fonction G par :

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } 0 \leqslant x < \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\pi}{8} + F[u(x)] & \text{si } \sqrt{2} - 1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(On ne demande pas d'expliciter $G(x)$ pour $\sqrt{2} - 1 \leqslant x \leqslant 1$.)

Donner un encadrement analogue à (1), valable sur l'intervalle $[0,1]$, pour :

$$\psi(x) = \text{Arctan } x - G(x).$$

II

Soit α un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1 - x^2} \cos \alpha\right).$$

a. Étudier les variations de f.

b. Soit C_α la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Étudier la concavité de C_α. Donner la forme de C_α.

2. On se propose de former le développement en série entière de f.

a. Montrer que, si f' est la dérivée de f, on peut écrire :

$$f'(x) = \frac{A}{1 + x^2 e^{2i\alpha}} + \frac{\overline{A}}{1 + x^2 e^{-2i\alpha}}$$

où A est un nombre complexe que l'on déterminera, et $\overline{A}$ le nombre complexe conjugué de A.

b. On rappelle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, où z est complexe, a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\frac{1}{1 - z}$.

Écrire le développement en série entière de f', puis celui de f.

c. Montrer que la suite (u_n), où $u_n = \cos[(2n + 1)\alpha]$, ne tend pas vers 0. (On pourra utiliser l'expression de u_n en fonction de $\cos[(2n - 1)\alpha]$, $\sin[(2n - 1)\alpha]$, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$.) Quel est le rayon de convergence du développement en série entière de f ?

3. *a.* Déduire de la question 2 la formule :

$$\text{Arctan}\,(\cos\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} \cos\left[(2n+1)\,\alpha\right]$$

où les c_{2n+1} sont des réels que l'on déterminera.

b. Pour tout entier positif ou nul N on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1} \cos\left[(2n+1)\,\alpha\right] \qquad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_{2n+1} \cos\left[(2n+1)\,\alpha\right].$$

En remarquant que $\left| c_{2n+1} \cos\left[(2n+1)\,\alpha\right] \right|$ est majoré par le terme général d'une série convergente, trouver un majorant de $\left| R_N \right|$.

4. On se propose maintenant d'appliquer les résultats de la question 3 à la construction d'une approximation de la fonction Arctan par une fonction polynôme.

a. Montrer que S_N est une fonction polynôme de la variable $x = \cos\alpha$. Quel est son degré ?

b. En déduire un polynôme P tel que, pour tout x de [0,1], on ait :

$$\left| \text{Arctan}\, x - P(x) \right| < 10^{-3}.$$

c. Pourrait-on obtenir le même résultat en prenant pour P l'une des sommes partielles de la série entière qui a pour somme la fonction Arctan ?